TD 5 : Les complexes

Forme algébrique, conjugué, module

Exercice 1. Mettre sous forme algébrique $z = \dfrac{1}{i}$, $u = (1+i)^5$, $v = -\dfrac{2}{1-i\sqrt{3}}$ et $w = \dfrac{2+5i}{1-i} + \dfrac{2-5i}{1+i}$.

Exercice 2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$|z-i| = |z+i| \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

Exercice 3. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Démontrer

$$\frac{z-i}{1-iz} \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow |z| = 1$$

Exercice 4. Décrire géométriquement l'ensemble $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = |1-z|\}$.
(On explicitera les parties réelles et imaginaires des nombres complexes appartenant à cet ensemble.)

Exercice 5. Montrer *l'identité du parallélogramme* :

$$\forall u, v \in \mathbb{C} \qquad |u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$$

et l'interpréter géométriquement.

Exercice 6. Soit $z_1, \ldots z_n \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|^2 = \sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} \mathrm{Re}(z_j \bar{z}_k)$$

Exercice 7. On note $f(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on a : $\overline{f(z)} = \dfrac{1}{f(\bar{z})}$.

Exercice 8. Déterminer les applications $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telles que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} & f(x) = x \\ \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 & \begin{cases} f(z+z') = & f(z) + f(z') \\ f(zz') = & f(z)f(z') \end{cases} \end{cases}$$

Forme trigonométrique et trigonométrie

Exercice 9. Mettre sous forme trigonométrique les complexes suivants :

1) $z_1 = 1 - \sqrt{2}$
2) $z_2 = -i$
3) $z_3 = 1 - i$
4) $z_4 = \dfrac{3}{1-i}$
5) $z_5 = (1+i)^5$
6) $z_6 = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$
7) $z_7 = e^{ia} + e^{ib}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 10. On pose $a = e^{i\frac{\pi}{3}}, b = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $Z = \dfrac{a}{b}$. Déterminer la forme algébrique de Z. En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 11. 1) Linéariser l'expression $\sin^5(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Linéariser l'expression $\cos^2(x)\sin^3(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) Exprimer $\sin(5t)$ comme une fonction polynômiale de $\sin(t)$.

Exercice 12. Faire le dernier exercice du TD4 (tour de magie trigonométrique).

Exercice 13. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ l'équation

$$\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x) = 0$$

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer

$$C = \sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb) \qquad S = \sum_{k=0}^{n} \sin(a+kb)$$

Exercice 15 ($\star$)**. Oral centrale** Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$. Montrer que

$$|1+z| \geq 1 \quad \text{ou} \quad |z^2+1| \geq 1$$

Racines et résolution d'équations

Exercice 16. Déterminer les racines carrées des complexes suivants :

1) $z_1 = -2$
2) $z_2 = i$
3) $z_3 = 1+i$
4) $z_4 = 3+4i$
5) $z_5 = 8-6i$
6) $z_6 = \dfrac{-3i}{1-i\sqrt{3}}$

Exercice 17. 1) Déterminer les racines cubiques de 8.

2) Déterminer les racines cinquièmes de $32i$.

3) Déterminer les racines cubiques de $4\sqrt{2}(1+i)$.

4) Déterminer les racines huitièmes de l'unité.

Exercice 18. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z^2 - (5+i)z + 8 + i = 0$
2) $z^2 - 4(1-i)z + 2(4-i) = 0$
3) $z^3 - (3+4i)z^2 - 4(1-3i)z + 12 = 0$ (on cherchera une solution réelle en premier lieu).
4) $z^4 - z^2 + 1 = 0$

Exercice 19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$. On définit pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

1) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$.
2) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Démontrer

$$P(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow P(\bar{\alpha}) = 0$$

Exercice 20 (Relations coefficients-racines)**.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} u+v & = 2 \\ uv & = -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u+v & = 4 \\ 1/u+1/v & = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u+v & = 4 \\ u^2+v^2 & = 2 \end{cases}$

Exercice 21. Soit $n \geq 3$, ω une racine n-ième de l'unité et $p \in \mathbb{Z}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$.

Exercice 22. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1) $z^3 = \bar{z}$
2) $e^z = 1 - i\sqrt{3}$
3) $z^n = (z-1)^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 23 (Autour du complexe j)**.** On pose $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1) Mettre j sous forme trigonométrique. En déduire que $j^2 = \overline{j}$ et que $\overline{j}^2 = j$.
2) Montrer que j et $\overline{j}$ sont les racines du polynôme $1 + z + z^2$.
3) Factoriser le polynôme $z^3 - 1$.

Exercice 24. Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On définit :

$$A = \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 0\,[3]}}^{n} \binom{n}{k} \qquad B = \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 1\,[3]}}^{n} \binom{n}{k} \qquad C = \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 2\,[3]}}^{n} \binom{n}{k}$$

1) Calculer $A + B + C$, $A + jB + j^2C$, $A + j^2B + jC$.
2) En déduire la valeur de A.

Géométrie complexe

Exercice 25. On considère les points A, B, C affixes respectives $a = 1, b = 1 + 2i$ et $c = 1 + \sqrt{3} + i$. Déterminer la nature du triangle ABC.

Exercice 26. Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que

1) $|z+3| = 5$
2) $z + \bar{z} = |z|^2$
3) Les points d'affixe 1, z et z^2 soient alignés.
4) Les points d'affixe z, z^2 et z^3 forment un triangle rectangle dont M est l'angle droit.